



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

КАФЕДРА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

Методические указания

к выполнению контрольной работы
по дисциплине «Теоретическая механика»

Ростов-на-Дону

2025

Составитель: к.т.н. Недина Евгения Александровна

Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Теоретическая механика». ДГТУ, г. Ростов-на-Дону, 2025 г.

В методических указаниях к каждому заданию контрольной работы приведены теоретическая часть, порядок выполнения задания, варианты исходных данных, пример выполнения задания, требования к содержанию отчета о выполнении задания, контрольные вопросы. Для удобства использования методические указания снабжены содержанием и списком использованной литературы.

Предназначено для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки: 35.03.06 Агроинженерия.

Ответственный за выпуск:

зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» (руководитель структурного подразделения, ответственного за реализацию ОПОП): к.ф.-м.н., доцент Панфилов И.А.

© Издательский центр ДГТУ, 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	4
ЗАДАНИЕ 1. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ.....	5
1.1. Теоретическая часть	5
1.2. Порядок выполнения задания 1	8
1.3. Варианты исходных данных	8
1.4. Пример выполнения задания 1.....	13
1.5. Требования к содержанию отчета о выполнении задания 1.....	15
1.6. Контрольные вопросы	15
ЗАДАНИЕ 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ	16
2.1. Теоретическая часть.....	16
2.2. Порядок выполнения задания 2	19
2.3. Варианты исходных данных	20
2.4. Пример выполнения задания 2.....	21
2.5. Требования к содержанию отчета о выполнении задания 2.....	27
2.6. Контрольные вопросы	27
ЗАДАНИЕ 3. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 2-ГО РОДА	28
3.1. Теоретическая часть.....	28
3.2. Порядок выполнения задания 3	29
3.3. Варианты исходных данных	29
3.4. Пример выполнения задания 3.....	33
3.5. Требования к содержанию отчета о выполнении задания 3.....	36
3.6. Контрольные вопросы	36
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	37

Общие положения

Контрольная работа по дисциплине «Теоретическая механика» включает три задания:

- задание 1 «Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил»;
- задание 2 «Кинематика точки»;
- задание 3 «Уравнения Лагранжа 2-го рода».

Контрольная работа позволяет обучающимся приобрести практические навыки решения задач по некоторым ключевым темам курса теоретической механики.

Методические указания к выполнению каждого отдельного задания контрольной работы содержат:

- теоретическую часть;
- порядок выполнения задания;
- варианты исходных данных;
- пример выполнения задания;
- требования к содержанию отчета о выполнении задания;
- контрольные вопросы.

Отчет о выполнении курсовой работы должен содержать:

- титульный лист установленного образца;
- содержание;
- отчеты о выполнении заданий контрольной работы.

Задание 1. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил

Цель задания: приобретение практических навыков определения условий равновесия твердого тела под действием плоской системы сил.

1.1. Теоретическая часть

Связи и их реакции

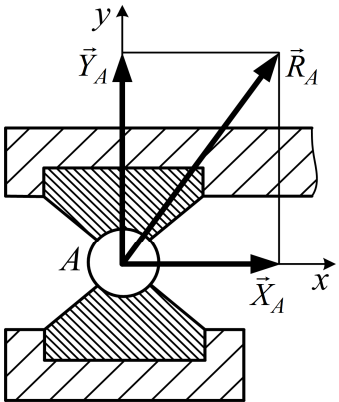
Если движению тела по любому направлению в пространстве ничто не препятствует, то тело называют **свободным**, в противном случае – **несвободным**. Тела, препятствующие движению данного тела, называют **связями**.

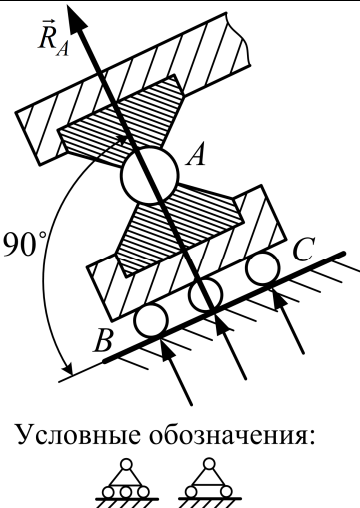
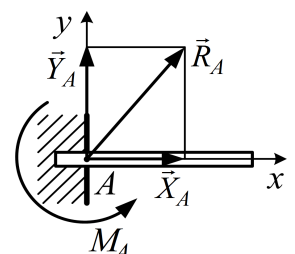
Несвободное тело можно представить свободным, отбросив связи и заменив их силами – *силами реакций связей*. В этом состоит аксиоматический **принцип освобожденности от связей**.

Общее правило для определения направления силы реакции таково: *сила реакции действует противоположно тому направлению, по которому связь препятствует перемещению тела*.

Виды связей, используемых при выполнении данного задания, и их реакции сведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Виды связей и их реакции

№ п/п	Изображение связи	Наименование связи	Реакция связи
1	 <p>Условные обозначения:</p> 	Опора А – <i>шарнирно-неподвижная опора</i> (цилиндрический шарнир). Позволяет балке поворачиваться вокруг оси А цилиндрического шарнира. Весь опорный узел считается одной геометрической точкой	Реакция \vec{R}_A проходит через ось шарнира и заранее неизвестна ни по величине, ни по направлению. Реакцию \vec{R}_A следует представлять в виде двух составляющих: \vec{X}_A и \vec{Y}_A

№ п/п	Изображение связи	Наименование связи	Реакция связи
2	 <p>Условные обозначения:</p>	Опора А – шарнирно-подвижная опора. Позволяет балке поворачиваться вокруг оси А шарнира и смещаться вдоль опорной плоскости ВС катков.	Реакция \vec{R}_A проходит через центр шарнира и является результирующей нормальных реакций опорной плоскости катков. Направлена по перпендикуляру к опорной плоскости катков в сторону от опорной плоскости
3		Опора А – плоская заделка	Реакция плоской заделки состоит из силы \vec{R}_A с составляющими \vec{X}_A и \vec{Y}_A и момента M_A

Распределенная нагрузка

Наряду с сосредоточенными силами в инженерных задачах рассматриваются силы, распределенные по объему, по поверхности или по линии.

Рассмотрим простейшие примеры параллельных сил, распределенных по отрезку прямой. **Распределенная нагрузка** характеризуется ее *интенсивностью* q – величиной силы, приходящейся на единицу длины. Интенсивность измеряется в Н/м.

Распределенную нагрузку необходимо заменять одной сосредоточенной силой – равнодействующей интенсивной нагрузки.

Наиболее часто встречающиеся виды распределенной нагрузки – *равномерно распределенная нагрузка* (рис. 1.1) и *нагрузка, распределенная по линейному закону* (рис. 1.2).

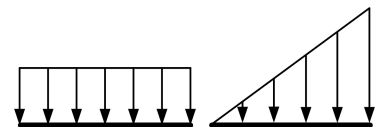


Рис. 1.1

Рис. 1.2

Нагрузка интенсивностью q , равномерно распределенная вдоль отрезка длины l , имеет равнодействующую, приложенную в середине отрезка и равную $Q = ql$ (рис. 1.3).

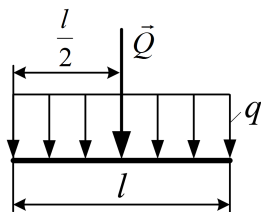


Рис. 1.3

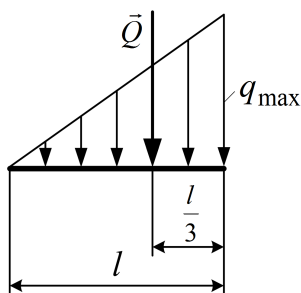


Рис. 1.4

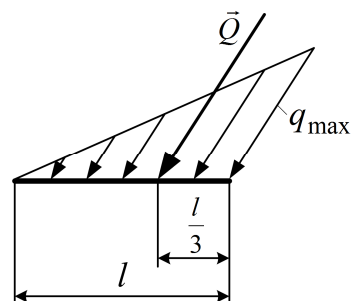


Рис. 1.5

Нагрузка, распределенная по линейному закону вдоль отрезка длины l , имеет равнодействующую, приложенную на расстоянии $\frac{l}{3}$ от максимальной величины интенсивности q_{\max} и равную $Q = \frac{1}{2} q_{\max} l$ (рис. 1.4). Результаты не изменятся, если распределенная нагрузка приложена под углом к отрезку (рис. 1.5).

Формы условий равновесия твердого тела под действием плоской системы сил

При составлении уравнений равновесия тела при действии *плоской системы сил* следует понимать, что наборы уравнений равновесия могут быть различными, но *число независимых уравнений*, входящих в набор, для одного и того же тела не может быть более *трех*. Любое четвертое уравнение окажется линейно зависимым от первых трех.

Первая форма. Для равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую координатную ось и алгебраическая сумма моментов относительно произвольной точки O плоскости равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases}$$

Вторая форма. Для равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек A и B , а также сумма проекций этих сил на ось x , не перпендикулярную отрезку AB , равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases}$$

Третья форма. Для равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно трех произвольных точек A , B и C , не лежащих на одной прямой, равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \\ \sum M_C = 0. \end{cases}$$

Примечание. При использовании каждой формы условий равновесия в качестве моментной точки рекомендуется выбирать точку пересечения линий действия неизвестных сил, либо точку приложения неизвестной силы.

Рекомендуемый порядок решения задач

1. Выбрать объект, равновесие которого будет рассматриваться.
2. Задать систему координат.
3. Отбросить связи, заменив их действие силами реакций. Оценить число неизвестных и возможность решения задачи методами статики.
4. Распределенную нагрузку заменить ее равнодействующей.
5. На расчетной схеме изобразить рассматриваемый объект, необходимые размерные линии, все активные силы и силы реакций, действующие на выделенный объект.
6. Составить и решить систему уравнений равновесия.
7. Составить проверочное уравнение, убедиться в верности определения неизвестных.

1.2. Порядок выполнения задания 1

1. Получить вариант задания.
2. Выполнить исходный рисунок, записать полное условие задачи.
3. Руководствуясь теоретической частью (см. п. 1.1) и примером выполнения задания (см. п. 1.4), выполнить его в соответствии с вариантом.
4. Оформить отчет о выполнении задания в соответствии с п. 1.5.

1.3. Варианты исходных данных¹

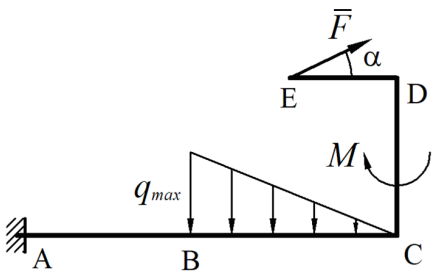
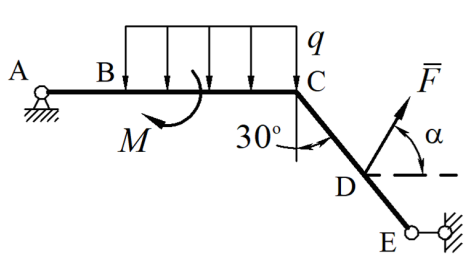
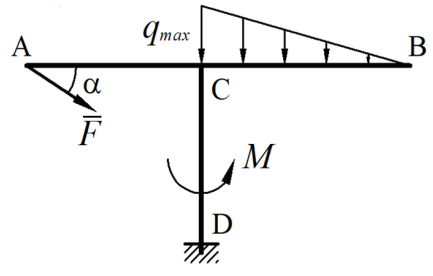
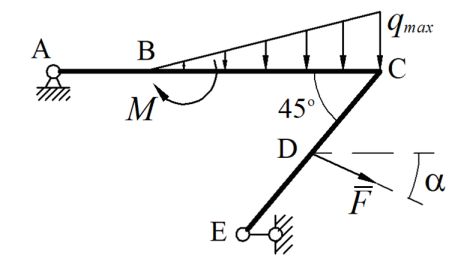
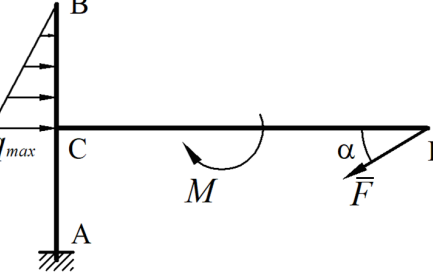
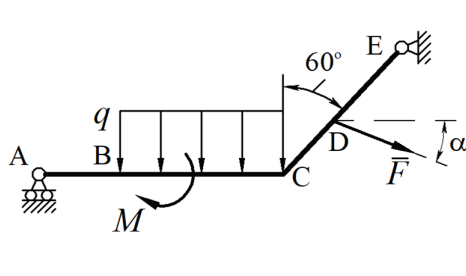
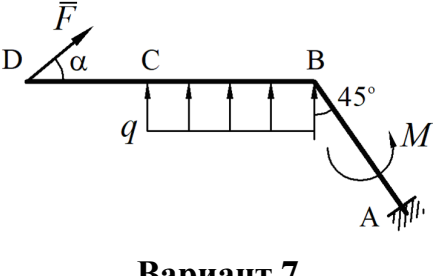
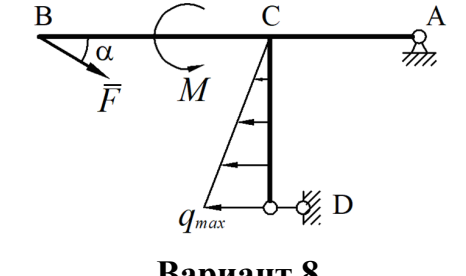
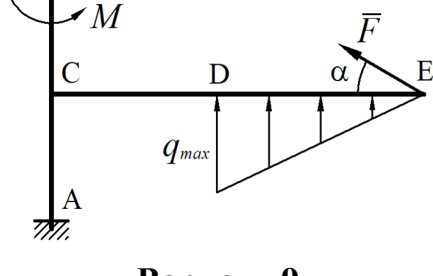
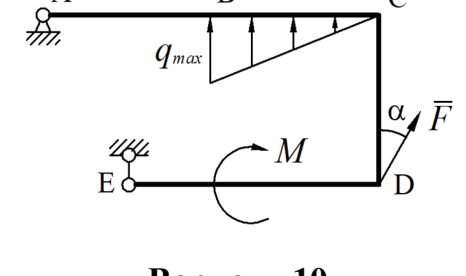
Задание. Определить все реакции опор тела, находящегося в равновесии под действием заданной нагрузки. Весом тела пренебречь.

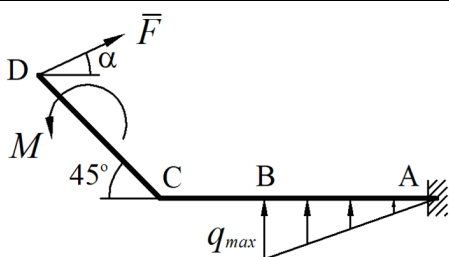
Варианты исходных данных приведены в табл. 1.2 и на схемах ниже.

¹ Лабораторный практикум по теоретической механике: учеб. пособие / А.Э. Волков, Е.А. Чеканина, Ю.А. Поляков [и др.]; под общ. ред. А.Э. Волкова. – Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2023. – 80 с.: ил.

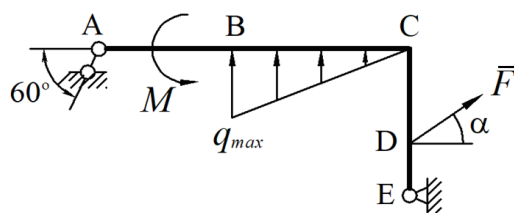
Таблица 1.2. Варианты исходных данных

Номер варианта	M , Н·м	F , Н	q , Н/м	q_{\max} , Н/м	AB , м	BC , м	CD , м	DE , м	α , град
1	2000	1500	—	200	4	5	3	3	30
2	3000	1400	300	—	2	4	2	3	60
3	4000	1300	—	400	8	3	5	—	45
4	5000	1200	—	500	3	6	3	2	30
5	6000	1100	—	600	5	3	7	—	60
6	7000	1000	500	—	2	4	3	2	30
7	8000	900	400	—	4	3	2	—	30
8	9000	1000	—	300	8	5	4	—	45
9	8000	1100	—	200	7	3	2	6	60
10	7000	1200	—	300	3	3	4	5	30
11	6000	1300	—	400	5	3	4	—	60
12	5000	1400	—	500	3	4	3	2	30
13	4000	1500	—	600	6	3	4	—	30
14	3000	1400	500	—	2	4	3	2	60
15	2000	1300	400	—	4	2	3	4	60
16	3000	1200	—	300	2	5	3	1	30
17	4000	1100	—	200	5	2	1	3	60
18	5000	1000	300	—	6	2	3	4	60
19	6000	900	—	400	3	2	8	—	30
20	7000	1000	500	—	3	4	3	2	45
21	8000	1100	—	600	7	5	6	2	60
22	9000	1200	—	500	2	3	2	3	60
23	8000	1300	—	400	2	3	4	—	45
24	7000	1400	—	300	8	3	5	—	30
25	6000	1500	—	200	2	5	3	3	30
26	5000	1400	—	300	3	2	3	1	60
27	4000	1300	400	—	4	5	3	5	60
28	3000	1200	500	—	3	4	1	4	30
29	2000	1100	600	—	1	4	7	—	60
30	3000	1000	—	500	8	4	1	4	60

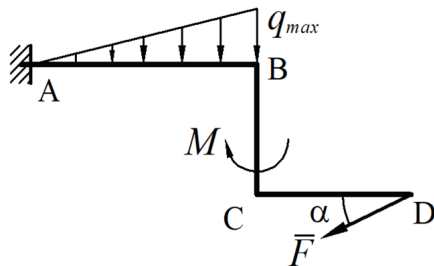
 <p>Вариант 1</p>	 <p>Вариант 2</p>
 <p>Вариант 3</p>	 <p>Вариант 4</p>
 <p>Вариант 5</p>	 <p>Вариант 6</p>
 <p>Вариант 7</p>	 <p>Вариант 8</p>
 <p>Вариант 9</p>	 <p>Вариант 10</p>



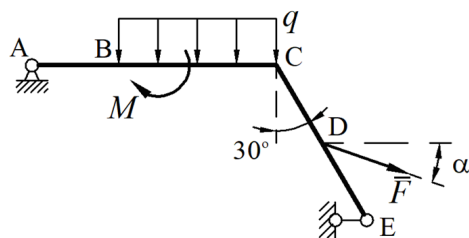
Вариант 11



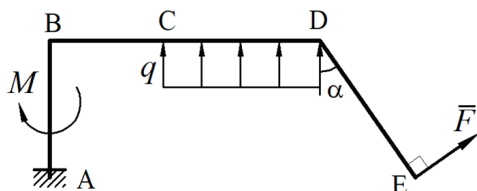
Вариант 12



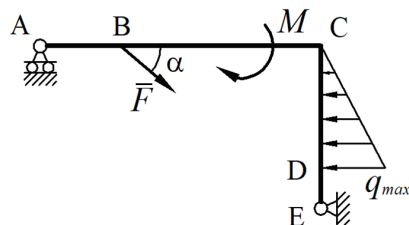
Вариант 13



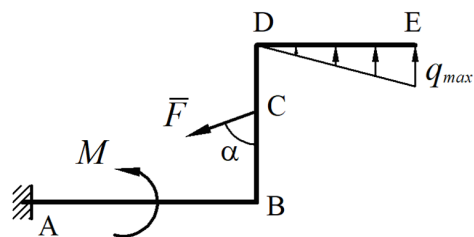
Вариант 14



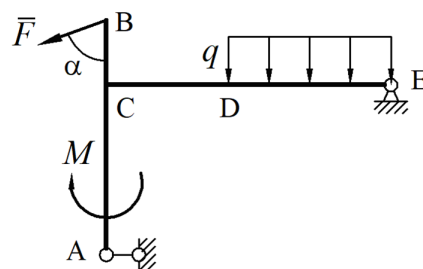
Вариант 15



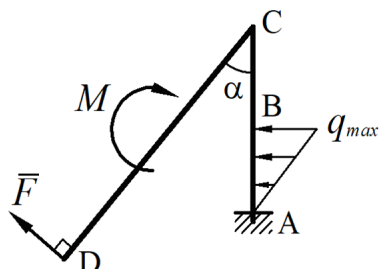
Вариант 16



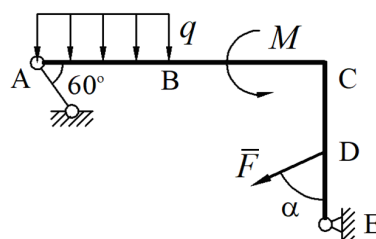
Вариант 17



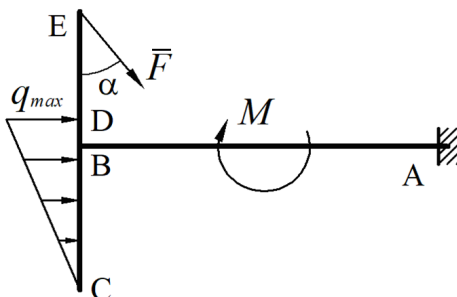
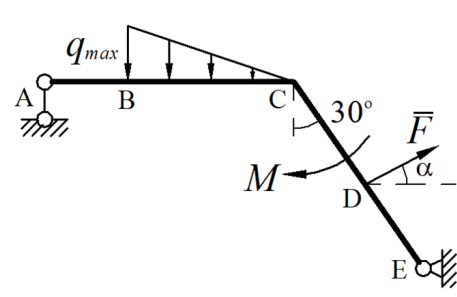
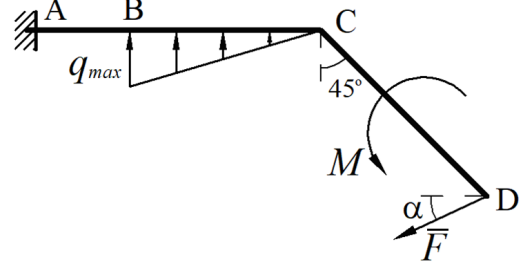
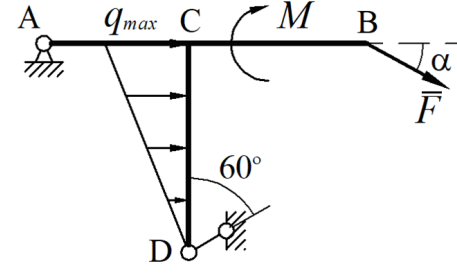
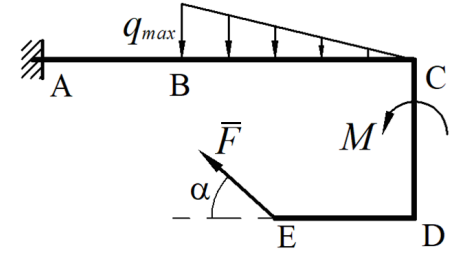
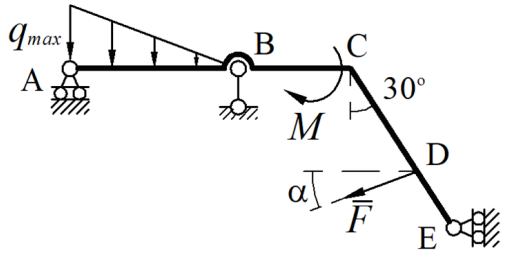
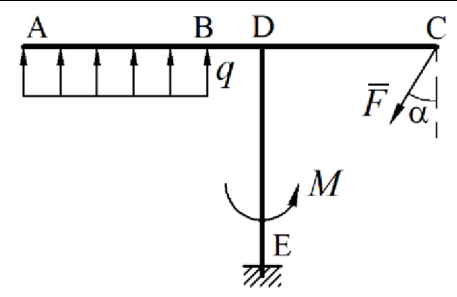
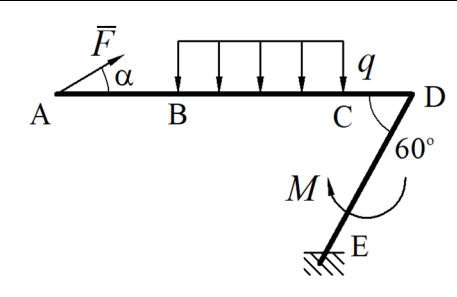
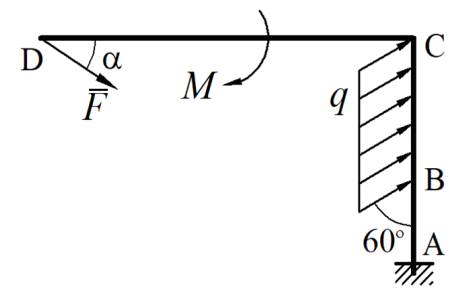
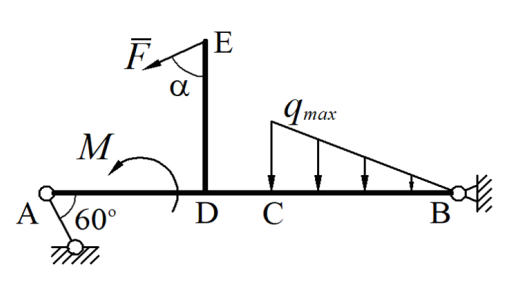
Вариант 18



Вариант 19



Вариант 20

 <p>Вариант 21</p>	 <p>Вариант 22</p>
 <p>Вариант 23</p>	 <p>Вариант 24</p>
 <p>Вариант 25</p>	 <p>Вариант 26</p>
 <p>Вариант 27</p>	 <p>Вариант 28</p>
 <p>Вариант 29</p>	 <p>Вариант 30</p>

1.4. Пример выполнения задания 1

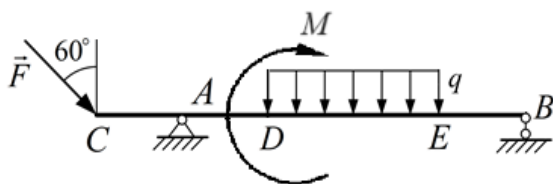


Рис. 1.6

Условие. Определить все реакции опор тела CB , находящегося в равновесии под действием заданной нагрузки (рис. 1.6). Исходные данные: $M = 4000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $F = 900 \text{ Н}$, $q = 200 \text{ Н/м}$, $CA = AD = EB = 2 \text{ м}$, $DE = 4 \text{ м}$. Весом тела пренебречь.

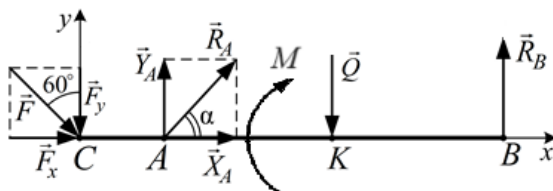


Рис. 1.7

Решение

1. Рассмотрим равновесие тела CB , освобождая его от связей (шарнирно-неподвижной опоры в точке A и шарнирно-подвижной опоры в точке B).

2. Начинаем создавать расчетную схему (рис. 1.7) с изображения тела CB . Выбираем систему координат и заменяем наложенные на тело CB связи их реакциями: в точке A – реакциями \vec{X}_A , \vec{Y}_A , а в точке B – реакцией \vec{R}_B (рис. 1.7). Силы реакций предварительно направляем в положительные стороны координатных осей.

Число неизвестных (X_A , Y_A и R_B) равно трем и число уравнений равновесия данной плоской произвольной системы равно трем, поэтому задачу возможно решить методами статики.

3. Равномерно распределенную нагрузку заменяем равнодействующей, равной

$$Q = q \cdot DE = 200 \cdot 4 = 800 \text{ Н}$$

и приложенной в точке K , делящей отрезок DE пополам (рис. 1.7).

Проекции силы \vec{F} на оси x и y равны, соответственно:

$$F_x = F \sin 60^\circ = 900 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 450\sqrt{3} \approx 779,42 \text{ Н};$$

$$F_y = F \cos 60^\circ = 900 \cdot \frac{1}{2} = 450 \text{ Н}.$$

4. Для определения опорных реакций применим вторую формулу условий равновесия плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & F_x + X_A = 0; & (1) \\ \sum M_A = 0; & F_y \cdot CA - M - Q \cdot AK + R_B \cdot AB = 0; & (2) \\ \sum M_B = 0; & F_y \cdot CB - Y_A \cdot AB - M + Q \cdot KB = 0. & (3) \end{cases}$$

Из уравнения (1) определяем величину горизонтальной составляющей реакции опоры A :

$$X_A = -F_x = -450\sqrt{3} \approx -779,42 \text{ Н.}$$

Величина горизонтальной составляющей реакции опоры А оказалась отрицательной, следовательно, предварительное направление этой силы выбрано ошибочно. Таким образом, горизонтальная составляющая реакции опоры А направлена в отрицательную сторону координатной оси x .

Из уравнения (3) определяем величину вертикальной составляющей реакции опоры А:

$$Y_A = \frac{F_y \cdot CB - M + Q \cdot KB}{AB} = \frac{450 \cdot 10 - 4000 + 800 \cdot 4}{8} = 462,5 \text{ Н.}$$

Таким образом, модуль опорной реакции в точке А равен

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-779,42)^2 + 462,5^2} \approx 906,31 \text{ Н.}$$

Определим направляющий косинус вектора реакции в точке А (рис. 1.7):

$$\cos \alpha = \frac{X_A}{|\vec{R}_A|} = \frac{-779,42}{906,31} \approx -0,86.$$

Отсюда

$$\alpha = \arccos(-0,86) \approx 149^\circ.$$

Из уравнения (2) определяем величину реакции опоры В:

$$R_B = \frac{-F_y \cdot CA + M + Q \cdot AK}{AB} = \frac{-450 \cdot 2 + 4000 + 800 \cdot 4}{8} = 787,5 \text{ Н.}$$

Составим проверочное уравнение $\sum Y = 0$:

$$-F_y + Y_A - Q + R_B = 0, \quad -450 + 462,5 - 800 + 787,5 \equiv 0.$$

Условие равновесия выполняется, значит, величины реакций опор определены верно.

Ответ: $R_A \approx 906,31 \text{ Н}$, $\angle(\vec{R}_A \wedge x) \approx 149^\circ$, $R_B = 787,5 \text{ Н}$.

1.5. Требования к содержанию отчета о выполнении задания 1

Отчет о выполнении задания 1 должен содержать:

- 1) тему и вариант задания;
- 2) исходную схему и полное условие задания;
- 3) расчетную схему;
- 4) подробное, последовательное и аккуратно оформленное решение задачи, выполненное в соответствии с порядком выполнения задания (см. п. 1.2) и примером выполнения задания (см. п. 1.4);
- 5) проверочное уравнение;
- 6) ответ.

1.6. Контрольные вопросы

1. Как определяется знак момента силы относительно точки?
2. Сколько неизвестных реакций появится при отбрасывании шарнирно-неподвижной опоры?
3. Сколько неизвестных реакций появится при отбрасывании шарнирно-подвижной опоры?
4. Сколько неизвестных реакций появится при отбрасывании плоской заделки?
5. Как определить равнодействующую и точку приложения равномерно распределенной нагрузки?
6. Как определить равнодействующую и точку приложения распределенной нагрузки, изменяющейся по линейному закону?
7. Сколько независимых уравнений равновесия можно составить для твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил?
8. Приведите примерный порядок определения условий равновесия твердого тела под действием плоской системы сил.

Задание 2. Кинематика точки

Цель задания: приобретение практических навыков решения задач по кинематике точки.

2.1. Теоретическая часть

Способы задания движения точки

В кинематике применяют три способа задания движения точки: *векторный*, *координатный* и *естественный*.

Векторный способ. При векторном способе положение точки определяется радиусом-вектором точки, являющимся функцией времени, в заданной системе отсчета:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) является *векторным уравнением движения точки* в выбранной системе отсчета.

Координатный способ. При координатном способе задаются координаты движущейся точки как функции времени в заданной системе отсчета:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) являются *кинематическими уравнениями движения точки* в выбранной системе отсчета. Одновременно эти уравнения являются *параметрическими уравнениями траектории*. Для перехода от параметрических уравнений траектории к уравнениям, дающим непосредственную связь между координатами, следует исключить из уравнений параметр t , например:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow F(x, y) = 0 \text{ или } y = f(x).$$

Координатный способ связан с векторным способом, т.к. координаты x, y, z точки можно рассматривать как координаты конца радиус-вектора этой точки:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Естественный способ. При естественном способе задаются:

- траектория точки;
- начало отсчета на траектории;
- положительное направление на траектории;
- закон изменения дуговой координаты, определяющей положение точки на траектории (рис. 2.1): $s = s(t)$.



Рис. 2.1

Дуговая координата может быть как положительной, так и отрицательной. Естественный способ задания движения точки удобно использовать, если траектория точки заранее известна.

Скорость и ускорение точки при различных способах задания движения

Сведем в табл. 2.1 формулы для определения скорости и ускорения точки при различных способах задания движения.

Таблица 2.1. Скорость и ускорение точки при различных способах задания движения

	Закон движения	Скорость	Ускорение
Векторный способ	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	Средняя скорость точки: $\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$ Скорость точки: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$	Среднее ускорение точки: $\vec{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$ Ускорение точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$
Координатный способ	$x = x(t),$ $y = y(t),$ $z = z(t)$	Проекции вектора скорости: $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}.$ Модуль вектора скорости: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$ $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$ Направляющие косинусы вектора скорости: $\cos \alpha = \frac{v_x}{ \vec{v} }, \cos \beta = \frac{v_y}{ \vec{v} },$ $\cos \gamma = \frac{v_z}{ \vec{v} }.$	Проекции вектора ускорения: $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y},$ $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$ Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$ $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$ Направляющие косинусы вектора ускорения: $\cos \alpha = \frac{a_x}{ \vec{a} }, \cos \beta = \frac{a_y}{ \vec{a} },$ $\cos \gamma = \frac{a_z}{ \vec{a} }.$
Естественный способ	$s = s(t)$	Средняя скорость точки: $v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$ Скорость точки: $\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}, v(t) = \dot{s}.$	Ускорение точки: $\vec{a} = \dot{s} \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}, \vec{a}^{\tau} = \dot{s} \ddot{s},$ $\vec{a}^n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n},$ $a = \sqrt{(a^{\tau})^2 + (a^n)^2}.$

В табл. 2.2 приведена классификация движений в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения точки.

Таблица 2.2. Классификация движений в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения точки

a^{τ}	a^n	Движение
0	0	Прямолинейное равномерное
$a^{\tau} = a = \text{const}$	0	Прямолинейное равнопеременное
$a^{\tau} = f(t)$	0	Прямолинейное с переменным ускорением
0	const	Равномерное по окружности
0	$a^n \neq 0$	Равномерное криволинейное
const	$a^n \neq 0$	Криволинейное равнопеременное
$a^{\tau} = f(t)$	$a^n \neq 0$	Криволинейное с переменным ускорением

Рекомендуемый порядок решения задач при задании движения точки координатным способом

1. Определить траекторию движения точки координатной форме $y = f(x)$, исключив из уравнений движения время t . Учесть, что траекторией является только та часть кривой $y = f(x)$, в которую может попасть точка при $t \geq 0$.

2. Задать систему координат и построить траекторию в плоскости xOy . Часть кривой $y = f(x)$, в которую может попасть точка при $t \geq 0$, следует выделить, оставшуюся часть кривой изобразить пунктиром.

Траектории должна быть построена с одинаковым масштабом по осям x и y .

3. Указать на рисунке местоположение точки M_0 в начальный момент времени, т.е. при $t_0 = 0$, а также ее местоположение M_1 в заданный момент времени t_1 . Точки с правильно вычисленными координатами должны лежать на траектории.

4. Определить проекции $v_x(t) = \dot{x}$, $v_y(t) = \dot{y}$ скорости точки на оси координат и полную скорость $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ точки. Найти значения $v_x(t_1)$, $v_y(t_1)$, $v(t_1)$ в заданный момент времени t_1 .

Выбрать масштаб для скоростей. Построить векторы \vec{v}_x , \vec{v}_y и $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. Вектор \vec{v} скорости точки должен получиться направленным по касательной к траектории ее движения.

5. Определить проекции $a_x(t) = \dot{v}_x$, $a_y(t) = \dot{v}_y$ ускорения точки на оси координат и полное ускорение $a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ точки. Найти значения $a_x(t_1)$, $a_y(t_1)$, $a(t_1)$ в заданный момент времени t_1 .

Выбрать масштаб для ускорений. Построить векторы \vec{a}_x , \vec{a}_y и $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$. Вектор \vec{a} полного ускорения должен быть направлен в сторону *вогнутости траектории*.

6. Определить касательное (тангенциальное) ускорение $a^\tau(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Найти значение $a^\tau(t_1)$ в заданный момент времени t_1 .

Изобразить вектор \vec{a}^τ на рисунке в выбранном масштабе для ускорений. Тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения модуля скорости и направлена по касательной к траектории.

7. Определить нормальное ускорение $a^n(t) = \sqrt{a^2 - (a^\tau)^2}$. Найти значение $a^n(t_1)$ в заданный момент времени t_1 .

Изобразить вектор \vec{a}^n на рисунке в выбранном масштабе для ускорений. Нормальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения направления скорости и направлена по главной нормали к центру кривизны траектории.

8. Проконтролировать на рисунке вектор полного ускорения \vec{a} точки: одновременно должны выполняться векторные суммы $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ и $\vec{a} = \vec{a}^\tau + \vec{a}^n$.

9. Определить радиус кривизны траектории по формуле $\rho(t) = \frac{v^2(t)}{a^n(t)}$. Найти значение $\rho(t_1)$ в заданный момент времени t_1 .

10. Свести полученные значения в таблицу, образец которой приведен ниже.

t_1 , с	x , м	y , м	v_x , м/с	v_y , м/с	v , м/с	a_x , м/с ²	a_y , м/с ²	a , м/с ²	a^τ , м/с ²	a^n , м/с ²	ρ , м

2.2. Порядок выполнения задания 2

1. Получить вариант задания.
2. Записать полное условие задачи.
3. Руководствуясь теоретической частью (см. п. 2.1) и примером выполнения задания (см. п. 2.4), выполнить его в соответствии с вариантом.
4. Оформить отчет о выполнении задания в соответствии с п. 2.5.

2.3. Варианты исходных данных²

Задание. Движение точки в плоскости xOy задано кинематическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где координаты x , y – в метрах, время t – в секундах (табл. 2.3).

Найти уравнение траектории точки в координатной форме, а также построить траекторию движения. Найти и изобразить скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в заданный момент времени t_1 . Определить радиус кривизны траектории в заданный момент времени t_1 .

Таблица 2.3. Варианты исходных данных

1.	$x = 2\sin(\pi t / 3),$ $y = -3\cos(\pi t / 3) + 4$	$t_1 = 1$	11.	$x = -3 - \sin(\pi t^2 / 6),$ $y = -\cos(\pi t^2 / 6)$	$t_1 = 1$
2.	$x = -3\sin(\pi t^2 / 6) + 3,$ $y = 1 - 3\cos(\pi t^2 / 6)$	$t_1 = 1$	12.	$x = 2\cos(\pi t^2 / 3) - 2,$ $y = -2\sin(\pi t^2 / 3)$	$t_1 = 1$
3.	$x = -5\cos(\pi t / 3),$ $y = -2\sin(\pi t / 3) - 4$	$t_1 = 1$	13.	$x = 3\cos^2(\pi t / 6) + 2,$ $y = 4 - 3\sin^2(\pi t / 6)$	$t_1 = 1$
4.	$x = -4\sin^2(\pi t / 6),$ $y = -4\cos^2(\pi t / 6) - 3$	$t_1 = 1$	14.	$x = 4t + 4,$ $y = -4 / (t + 1)$	$t_1 = 1$
5.	$x = -2t - 2,$ $y = -2 / (t + 1)$	$t_1 = 2$	15.	$x = -4\cos(\pi t / 3) + 3,$ $y = 2\sin(\pi t / 3) - 1$	$t_1 = 0,5$
6.	$x = 7\sin^2(\pi t / 6) - 5,$ $y = -7\cos^2(\pi t / 6)$	$t_1 = 1$	16.	$x = 3t^2 - t + 1,$ $y = 9t^2 - 3t - 2$	$t_1 = 1$
7.	$x = 3t,$ $y = -9t^2 - 4$	$t_1 = 1$	17.	$x = -3 / (t + 2),$ $y = 3t + 6$	$t_1 = 1$
8.	$x = 2\sin(\pi t^2 / 6) - 1,$ $y = 2\cos(\pi t^2 / 6) + 4$	$t_1 = 1$	18.	$x = -2t + 1,$ $y = -4t^2 + 1$	$t_1 = 1$

² Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Кинематика: учебное пособие. М.: ИЦ МГТУ «Станкин», 2002. — 129 с.

9.	$x = 3t - 3t^2 + 1,$ $y = 2t^2 - 2t + 1$	$t_1 = 1$	19.	$x = 5\cos(\pi t^2 / 3) - 4,$ $y = 1 - 5\sin(\pi t^2 / 3)$	$t_1 = 1$
10.	$x = -t + 1,$ $y = -2t^2 - 4$	$t_1 = 1$	20.	$x = 2t - 1,$ $y = 4t^2 + 1$	$t_1 = 0,5$
21.	$x = 1 + 2\cos(\pi t^2 / 3),$ $y = 2\sin(\pi t^2 / 3) + 3$	$t_1 = 1$	26.	$x = -2t,$ $y = -3t^2 + 1$	$t_1 = 1$
22.	$x = 2 - 3t - 6t^2,$ $y = 3 - 3t / 2 - 3t^2$	$t_1 = 1$	27.	$x = -t + 2,$ $y = -2t^2 + 3$	$t_1 = 0,5$
23.	$x = 5t,$ $y = 7t^2 - 3$	$t_1 = 0,5$	28.	$x = -\cos(\pi t / 3) + 3,$ $y = \sin(\pi t / 3) - 1$	$t_1 = 1$
24.	$x = 1 - 4\cos(\pi t / 3),$ $y = 3 - \sin(\pi t / 3)$	$t_1 = 1$	29.	$x = 3\cos(\pi t / 6) + 3,$ $y = \sin(\pi t / 6) - 4$	$t_1 = 0,5$
25.	$x = 2\cos^2(\pi t / 6) + 2,$ $y = -2\sin^2(\pi t / 6) - 4$	$t_1 = 0,5$	30.	$x = 3 - \cos(\pi t / 3),$ $y = 4 - \sin(\pi t / 3)$	$t_1 = 0,5$

2.4. Пример выполнения задания 2

Условие. Движение точки в плоскости xOy задано уравнениями

$$x(t) = 4\sin \pi t, \quad y(t) = 3\cos 2\pi t, \quad (2.3)$$

где координаты x, y – в метрах, время t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки в координатной форме, скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории в момент времени $t_1 = 1/6$ с. Изобразить искомые векторы на рисунке для заданного момента времени.

Решение

1. Исключая из уравнений движения (2.3) параметр t , получим уравнение траектории в координатной форме:

$$y = 3\cos 2\pi t = 3(1 - 2\sin^2 \pi t) = 3 - \frac{3}{8}x^2. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) является уравнением параболы.

Учтем, что траекторией является только та часть кривой $y = f(x)$, в которую может попасть точка при $t \geq 0$.

Для этого проанализируем заданные уравнения (2.3) движения при $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\sin \pi t \in [-1; 1] &\Rightarrow x \in [-4; 4], \\ \cos 2\pi t \in [-1; 1] &\Rightarrow y \in [-3; 3].\end{aligned}$$

Траекторией точки является часть параболы при $x \in [-4; 4]$, $y \in [-3; 3]$.

2. Построим траекторию в плоскости xOy с одинаковым масштабом по осям x и y (рис. 2.2). На рисунке показана часть кривой, описываемой уравнением (2.4), для значений координат $x \in [-4; 4]$ и $y \in [-3; 3]$.

3. Определим местоположение точки M_0 в начальный момент времени, т.е. при $t_0 = 0$:

$$x(t_0) = 4\sin(\pi \cdot 0) = 0, \quad y(t_0) = 3\cos(2\pi \cdot 0) = 3 \text{ м.}$$

Найдем местоположение точки M_1 в заданный момент времени t_1 :

$$x(t_1) = 4\sin \frac{\pi}{6} = 2 \text{ м}, \quad y(t_1) = 3\cos \frac{2\pi}{6} = 1,5 \text{ м.}$$

Окончательно имеем:

– положение точки в начальный момент времени: $M_0(0; 3)$;

– положение точки в заданный момент времени: $M_1(2; 1,5)$.

Укажем на рис. 2.2 местоположение точки M_0 в начальный момент времени, т.е. при $t_0 = 0$, а также ее местоположение M_1 в заданный момент времени t_1 .

Обе точки лежат на траектории, значит их координаты определены верно.

4. Определим проекции скорости точки на оси координат для произвольного момента времени:

$$\begin{aligned}v_x(t) = \dot{x} &= 4\pi \cos \pi t, \quad v_y(t) = \dot{y} = -6\pi \sin 2\pi t, \\ v(t) &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\pi \sqrt{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Найдем значения $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v(t)$ в заданный момент времени t_1 :

$$v_x(t_1) = 4\pi \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}\pi \approx 10,9 \text{ м/с}, \quad v_y(t_1) = -6\pi \sin \frac{2\pi}{6} = -3\sqrt{3}\pi \approx -16,3 \text{ м/с},$$

$$v(t_1) = 2\pi \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 9 \sin^2 \frac{2\pi}{6}} = \sqrt{39}\pi \approx 19,6 \text{ м/с}.$$

Построим векторы $\vec{v}_x(t_1)$, $\vec{v}_y(t_1)$ и $\vec{v}(t_1)$ в выбранном масштабе для скоростей (рис. 2.2).

Вектор $\vec{v}(t_1)$ скорости точки получился направленным по касательной к траектории ее движения, что подтверждает верность проведенных расчетов.

5. Определим проекции ускорения точки на оси координат для произвольного момента времени:

$$\begin{aligned} a_x(t) = \dot{v}_x = \ddot{x} &= -4\pi^2 \sin \pi t, \quad a_y(t) = \dot{v}_y = \ddot{y} = -12\pi^2 \cos 2\pi t, \\ a(t) &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\pi^2 \sqrt{\sin^2 \pi t + 9\cos^2 2\pi t}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Найдем значения $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a(t)$ в заданный момент времени t_1 :

$$\begin{aligned} a_x(t_1) &= -4\pi^2 \sin \frac{\pi}{6} = -2\pi^2 \approx -19,7 \text{ м/с}^2, \\ a_y(t_1) &= -12\pi^2 \cos \frac{2\pi}{6} = -6\pi^2 \approx -59,2 \text{ м/с}^2, \\ a(t_1) &= 4\pi^2 \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{6} + 9\cos^2 \frac{2\pi}{6}} = 2\sqrt{10}\pi^2 \approx 62,4 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Построим векторы $\vec{a}_x(t_1)$, $\vec{a}_y(t_1)$ и $\vec{a}(t_1)$ в выбранном масштабе для ускорений (рис. 2.2).

Вектор $\vec{a}(t_1)$ ускорения точки получился направленным в сторону вогнутости траектории, что подтверждает верность проведенных расчетов.

6. С учетом (2.5) определим касательное (тангенциальное) ускорение для произвольного момента времени:

$$\begin{aligned} a^\tau(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\left(2\pi\sqrt{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}\right)}{dt} = \\ &= 2\pi \frac{4 \cdot 2 \cdot \cos \pi t \cdot (-\sin \pi t) \cdot \pi + 9 \cdot 2 \cdot \sin 2\pi t \cdot \cos 2\pi t \cdot 2\pi}{2\sqrt{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}} = \\ &= \frac{2\pi^2 (9\sin 4\pi t - 2\sin 2\pi t)}{\sqrt{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Найдем значение $a^\tau(t)$ в заданный момент времени t_1 :

$$a^\tau(t_1) = \frac{2\pi^2 \left(9\sin \frac{4\pi}{6} - 2\sin \frac{2\pi}{6}\right)}{\sqrt{4\cos^2 \frac{\pi}{6} + 9\sin^2 \frac{2\pi}{6}}} = \frac{14\sqrt{13}\pi^2}{13} \approx 38,3 \text{ м/с}^2.$$

Построим вектор $\vec{a}^{\tau}(t_1)$ по касательной к траектории в выбранном масштабе для ускорений (рис. 2.2).

7. С учетом (2.6) и (2.7) определим нормальное ускорение для произвольного момента времени:

$$\begin{aligned}
 a^n(t) &= \sqrt{a^2 - (a^{\tau})^2} = \sqrt{16\pi^4 (\sin^2 \pi t + 9\cos^2 2\pi t) - \frac{4\pi^4 (9\sin 4\pi t - 2\sin 2\pi t)^2}{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}} = \\
 &= 2\pi^2 \sqrt{\frac{(36\sin^2 \pi t \sin^2 2\pi t + 144\cos^2 2\pi t \cos^2 \pi t) + 144\sin 2\pi t \cos 2\pi t \sin \pi t \cos \pi t}{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}} = \\
 &= 2\pi^2 \sqrt{\frac{(6\sin \pi t \sin 2\pi t + 12\cos \pi t \cos 2\pi t)^2}{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}} = \\
 &= \frac{12\pi^2 (\sin \pi t \sin 2\pi t + 2\cos \pi t \cos 2\pi t)}{\sqrt{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}}. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Найдем значение $a^n(t)$ в заданный момент времени t_1 :

$$a^n(t_1) = \frac{12\pi^2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{6} + 2\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{6} \right)}{\sqrt{4\cos^2 \frac{\pi}{6} + 9\sin^2 \frac{2\pi}{6}}} = \frac{18\sqrt{13}\pi^2}{13} \approx 49,3 \text{ м/с}^2.$$

Направим вектор $\vec{a}^n(t_1)$ по главной нормали к центру кривизны траектории в выбранном масштабе для ускорений (рис. 2.2).

8. Проконтролируем верность определения и построения ускорений точки. На рис. 2.2 одновременно выполняются векторные суммы $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ и $\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^n$, что подтверждает корректность расчетов.

9. С учетом (2.5) и (2.8) определим радиус кривизны траектории для произвольного момента времени:

$$\rho(t) = \frac{v^2(t)}{a^n(t)} = \frac{4\pi^2 (4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t)}{\frac{12\pi^2 (\sin \pi t \sin 2\pi t + 2\cos \pi t \cos 2\pi t)}{\sqrt{4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t}}} = \frac{(4\cos^2 \pi t + 9\sin^2 2\pi t)^{3/2}}{3(\sin \pi t \sin 2\pi t + 2\cos \pi t \cos 2\pi t)}.$$

Найдем значение $\rho(t)$ в заданный момент времени t_1 :

$$\rho(t_1) = \frac{\left(4 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 9 \sin^2 \frac{2\pi}{6}\right)^{3/2}}{3 \left(\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{6}\right)} = \frac{39\sqrt{13}}{18} \approx 7,8 \text{ м.}$$

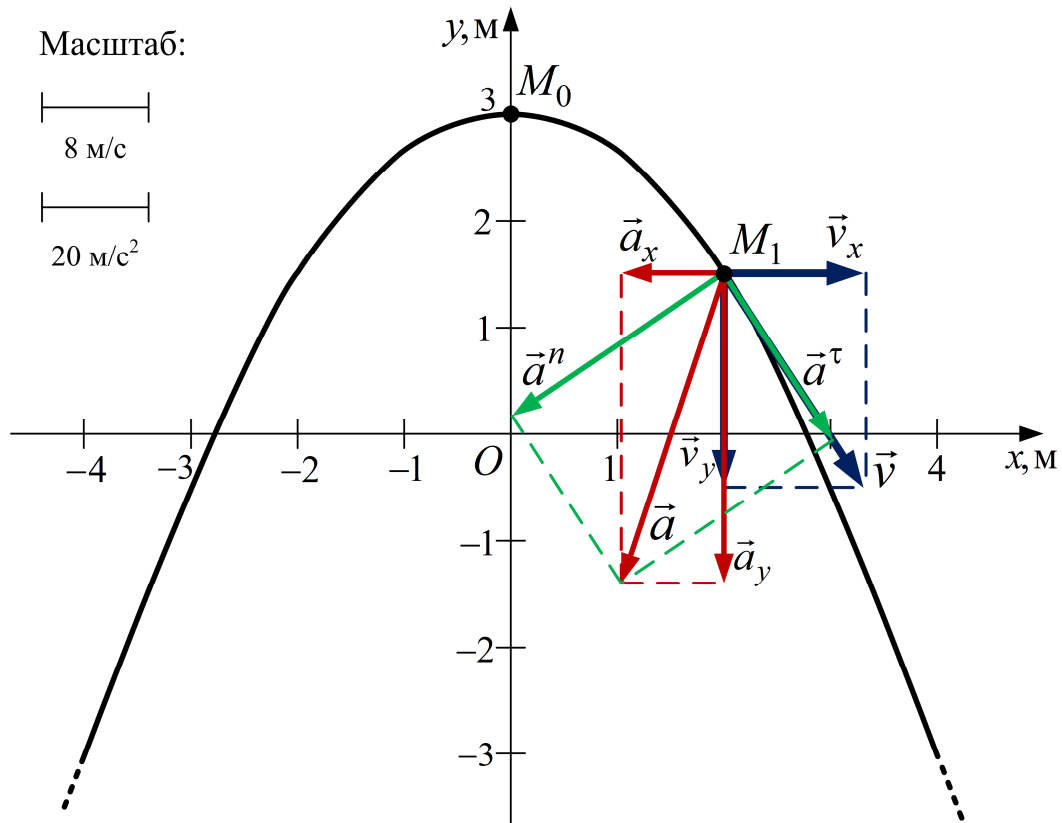


Рис. 2.2

10. Сведем полученные значения в таблицу.

t_1 , с	x , м	y , м	v_x , м/с	v_y , м/с	v , м/с	a_x , м/с ²	a_y , м/с ²	a , м/с ²	a^τ , м/с ²	a^n , м/с ²	ρ , м
$\frac{1}{6}$	2	1,5	10,9	-16,3	19,6	-19,7	-59,2	62,4	38,3	49,3	7,8

2.5. Требования к содержанию отчета о выполнении задания 2

Отчет о выполнении задания 2 должен содержать:

- 1) тему и вариант задания;
- 2) полное условие задания;
- 3) подробное, последовательное и аккуратно оформленное решение задачи, выполненное в соответствии с порядком выполнения задания (см. п. 2.2) и примером выполнения задания (см. п. 2.4);
- 4) ответ.

2.6. Контрольные вопросы

1. Как получить уравнение траектории движения точки, если заданы ее кинематические уравнения движения?
2. Как определить полную скорость точки, если заданы кинематические уравнения ее движения?
3. Как найти тангенциальное ускорение точки, если заданы кинематические уравнения ее движения
4. Как определить нормальное ускорение точки, если заданы кинематические уравнения ее движения
5. Как найти полное ускорение точки, если заданы кинематические уравнения ее движения?
6. Как определить радиус кривизны траектории, если заданы кинематические уравнения ее движения?

3.2. Порядок выполнения задания 3

1. Выбрать вариант задания в соответствии со списком группы.
2. Выполнить исходный рисунок, записать полное условие задачи.
3. Руководствуясь теоретической частью (см. п. 3.1) и примером выполнения задания (см. п. 3.4), определить искомые скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.
4. Оформить отчет о выполнении задания в соответствии с п. 3.5.

3.3. Варианты исходных данных³

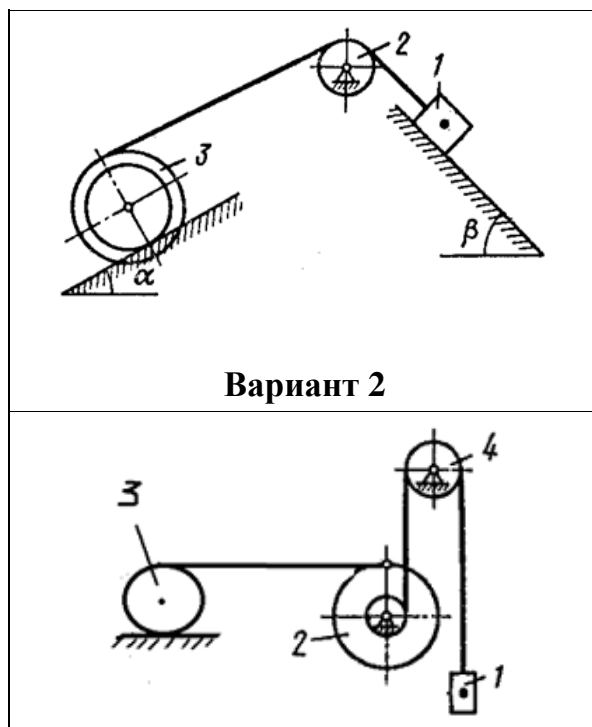
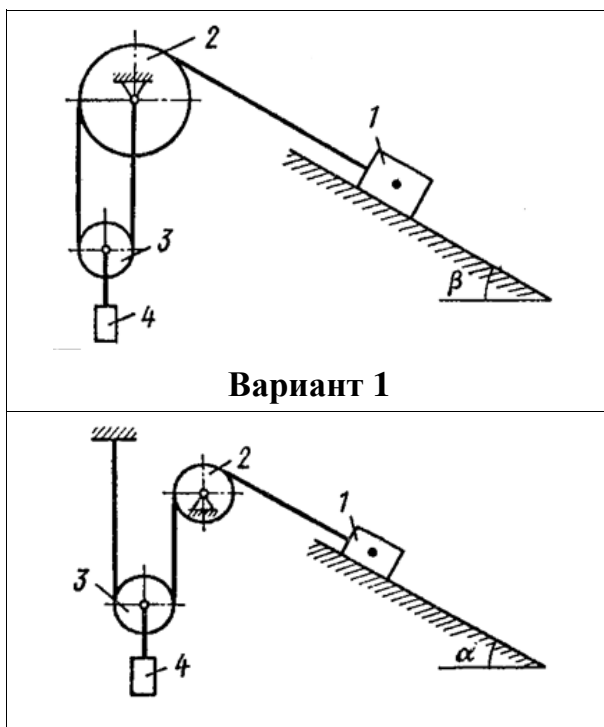
Задание. Определить ускорение и закон движения тела 1 с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода. Считать, что движение системы начинается из состояния покоя под действием силы тяжести тела 1 .

В вариантах 1 – 3, 6, 8 – 12, 16 – 17, 19 – 24, 28 – 30 учесть трение скольжения тела 1 (коэффициент трения скольжения – f). В вариантах 2, 4 – 9, 11, 13, 15, 17 – 18, 21 – 22, 24 – 27, 29 учесть сопротивление качению тела 3 (коэффициент трения качения – δ_k).

Массы тел $1, 2, 3, 4$ равны соответственно m_1, m_2, m_3, m_4 .

Блоки и катки – сплошные однородные цилиндры радиусов R_2, R_3, R_4 . У ступенчатых блоков и катков считать известными не только радиусы R больших окружностей, но и радиусы r малых окружностей, а также моменты инерции J относительно осей симметрии.

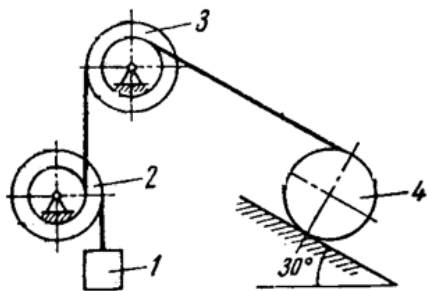
Тела считать абсолютно твердыми, а нити – абсолютно нерастяжимыми и невесомыми.



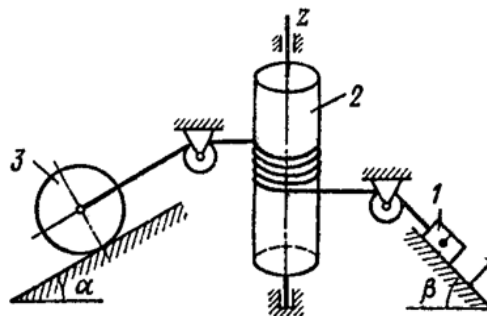
³ Динамика: учебное пособие / С.А. Еленев, В.Г. Новиков, А.И. Огурцов, Г.И. Шевелева. – М.: ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2010.

Вариант 3

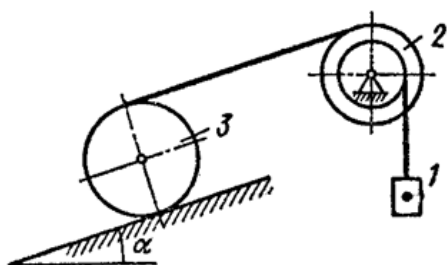
Вариант 4



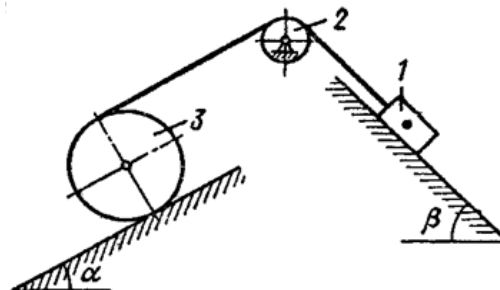
Вариант 5



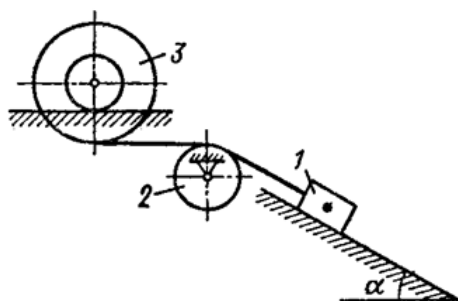
Вариант 6



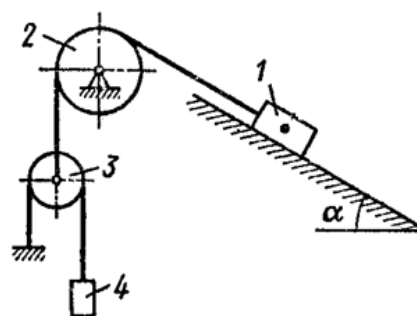
Вариант 7



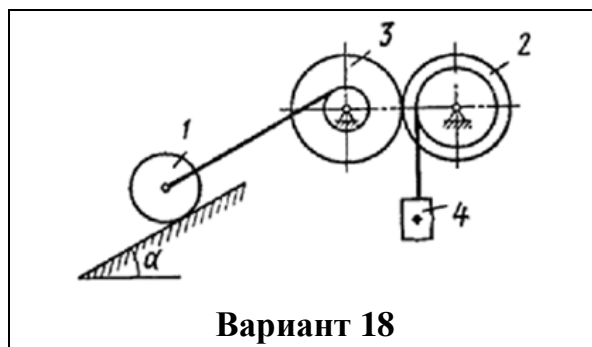
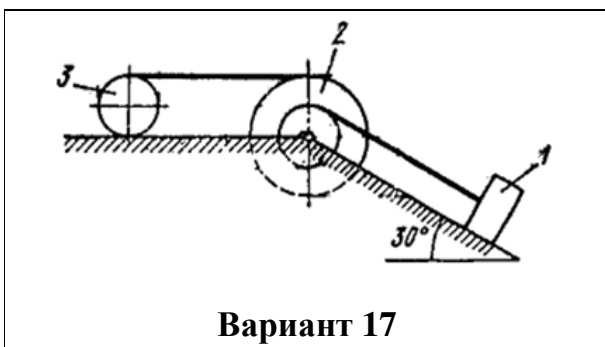
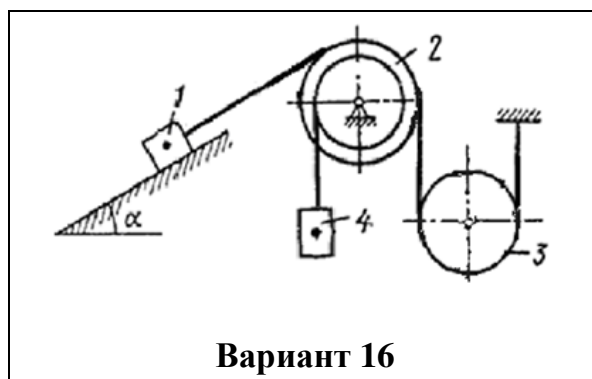
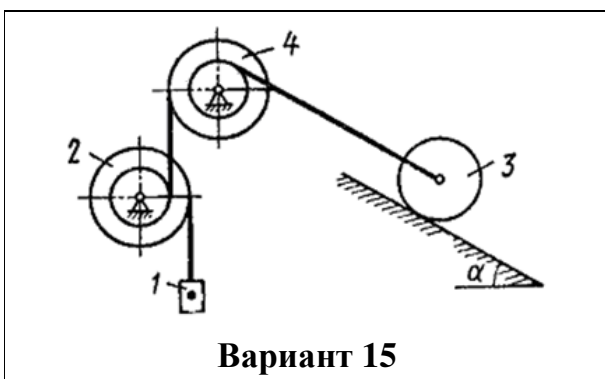
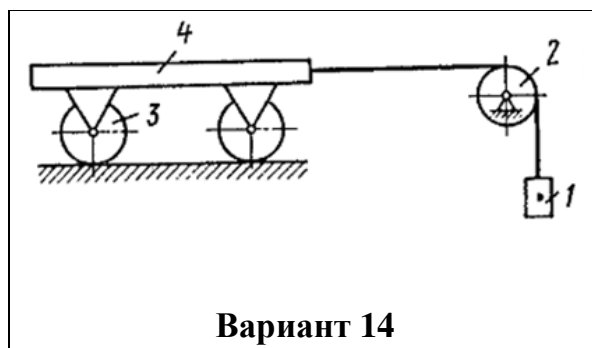
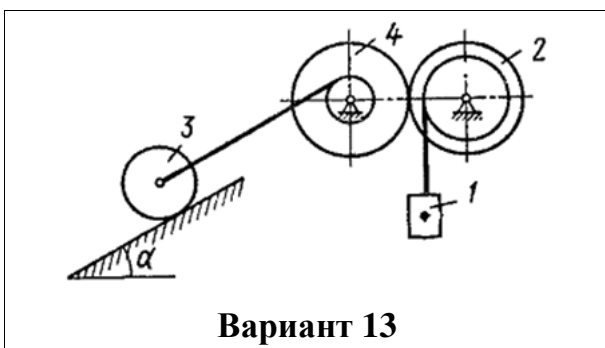
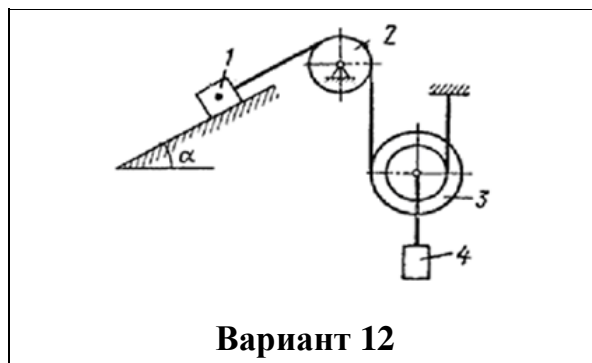
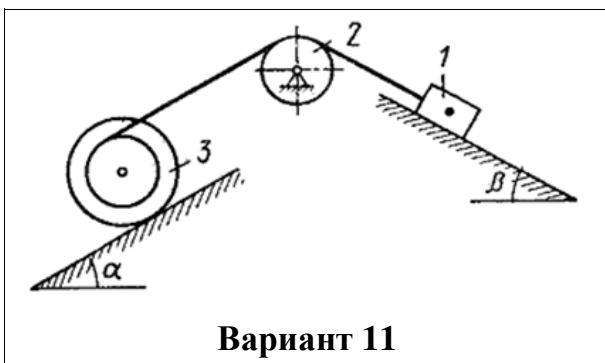
Вариант 8

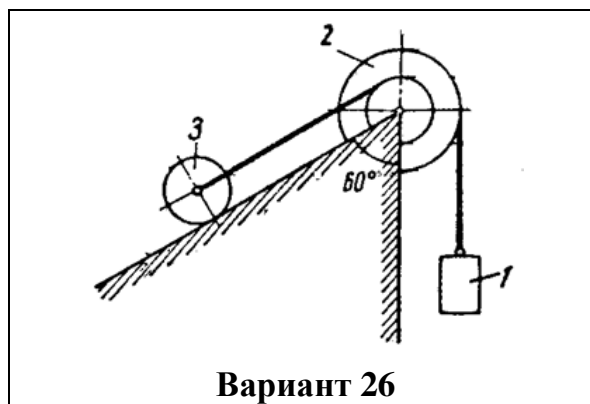
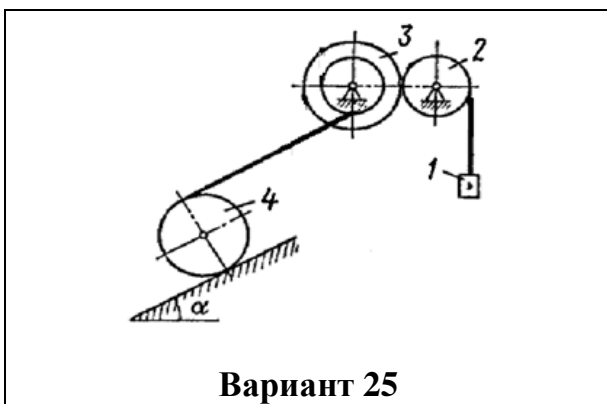
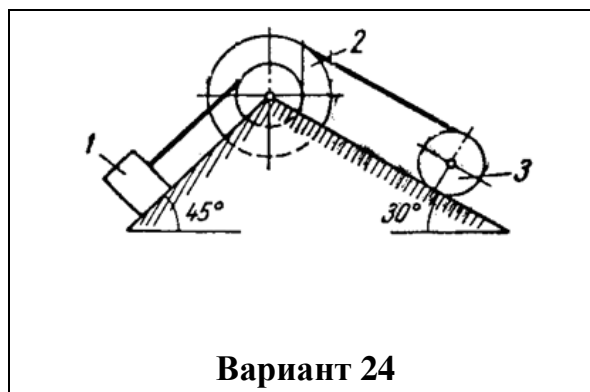
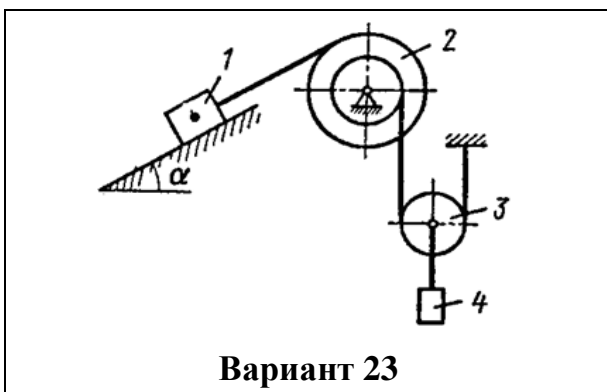
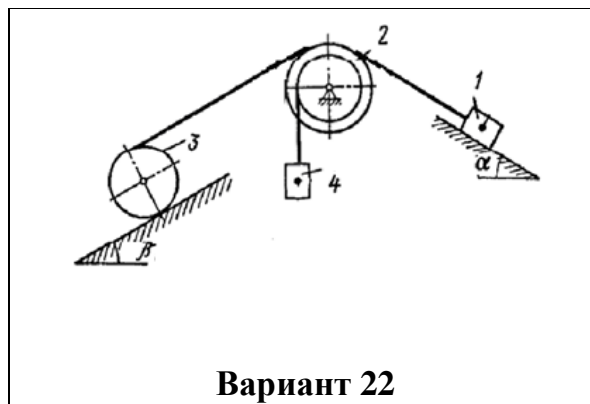
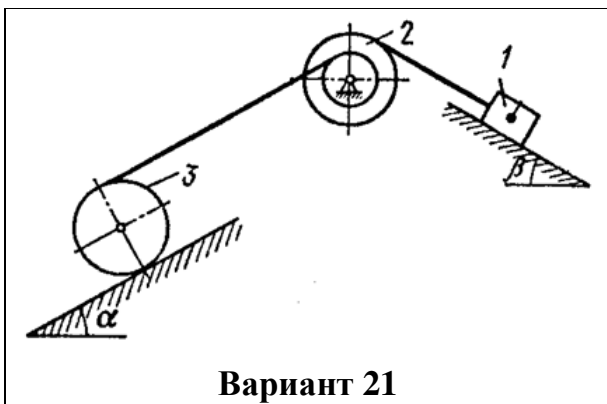
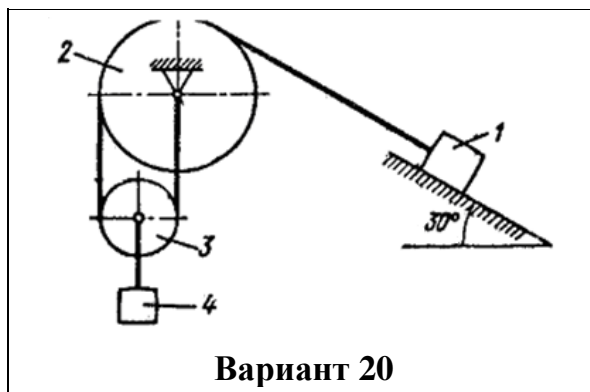
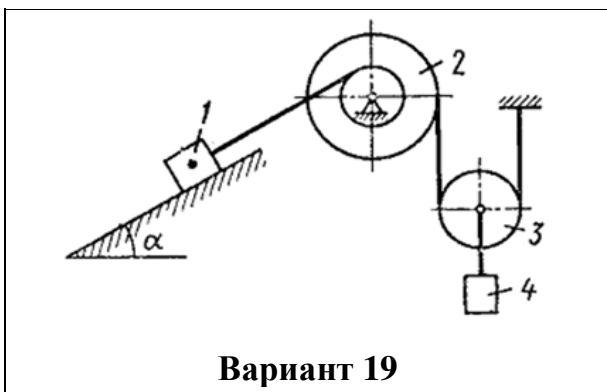


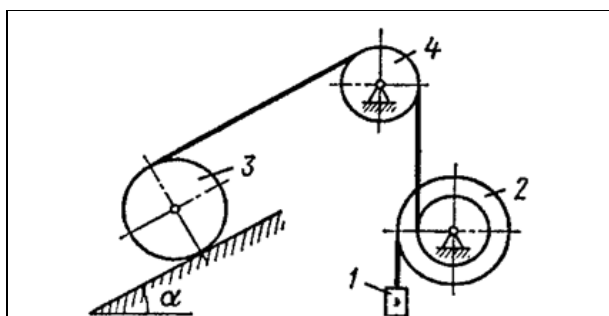
Вариант 9



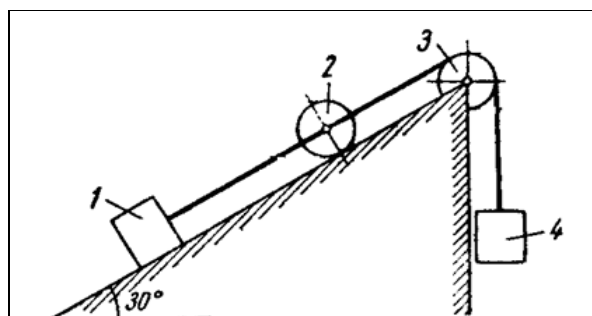
Вариант 10



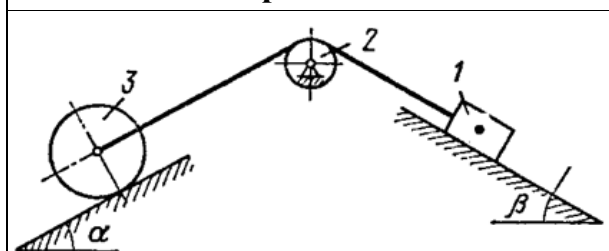




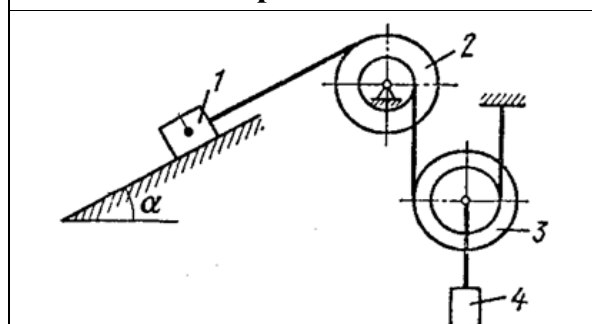
Вариант 27



Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30

3.4. Пример выполнения задания 3

Условие. Груз 1 массы m_1 подвешен к системе блоков (рис. 3.1). Считая блоки массы m_2 и m_3 однородными и сплошными дисками, определить ускорение и закон движения груза 1. Система приходит в движение под действием сил тяжести из состояния покоя.

Решение

1. Выполним кинематический анализ (рис. 3.2):

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}, \quad \omega_3 = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_1}{2R_3}, \quad v_C = \omega_3 CC_v = \frac{v_1}{2},$$

где C_v – мгновенный центр скоростей тела 3.

2. Механическая система имеет одну степень свободы, поэтому для исследования ее движения составляем одно уравнение Лагранжа, соответствующее обобщенной координате $q = x$ (рис. 3.2):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x. \quad (3.1)$$

2. Определим кинетическую энергию системы и выразим ее через обобщенную скорость, т.е. через \dot{x} .

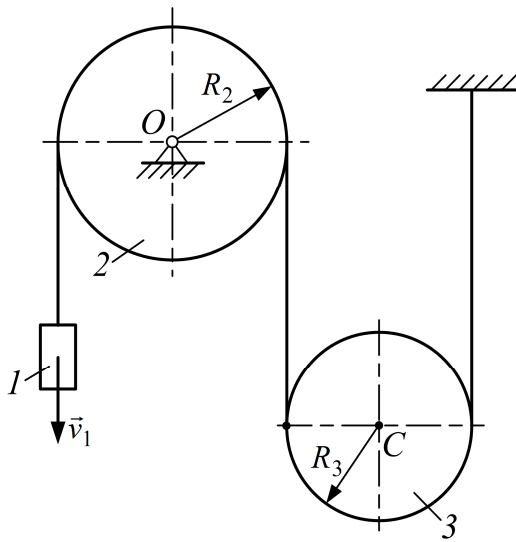


Рис. 3.1

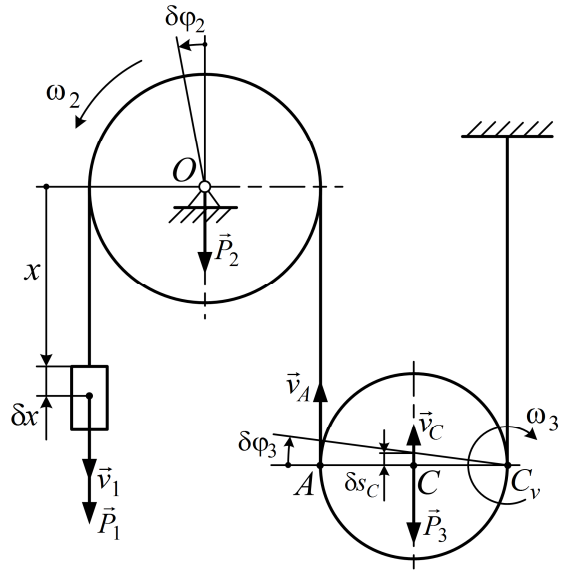


Рис. 3.2

Тело 1 движется поступательно, поэтому

$$E_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}.$$

Блок 2 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси O , проходящей через центр блока, поэтому

$$E_{к2} = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{\frac{1}{2} m_2 R_2^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R_2^2}}{2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{4},$$

где $J_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}$ – момент инерции блока 2 относительно оси O ; $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{\dot{x}}{R_2}$ – угловая скорость блока 2.

Блок 3 совершает плоскопараллельное движение, поэтому

$$E_{к3} = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2R_3}\right)^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}^2}{8} + \frac{m_3 \dot{x}^2}{16} = \frac{3m_3 \dot{x}^2}{16},$$

где $J_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}$ – осевой момент инерции блока 3; $\omega_3 = \frac{v_C}{R_3} = \frac{\dot{x}}{2R_3}$ – угловая скорость блока 3.

Определяем кинетическую энергию механической системы:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{4} + \frac{3m_3 \dot{x}^2}{16} = \frac{\dot{x}^2}{16} (8m_1 + 4m_2 + 3m_3). \quad (3.2)$$

Производим с выражением (3.2) операции, предписываемые левой частью уравнения (3.1):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{8} (8m_1 + 4m_2 + 3m_3), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \frac{\ddot{x}}{8} (8m_1 + 4m_2 + 3m_3), \quad \frac{\partial E_k}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

3. Для определения обобщенной силы дадим системе возможное перемещение, при котором координата x получит приращение δx (рис. 3.2). Суммарная элементарная работа на этом перемещении равна

$$\sum \delta A = P_1 \delta x - P_3 \delta s_C = m_1 g \delta x - m_3 g \frac{\delta x}{2} = \frac{g}{2} (2m_1 - m_3),$$

следовательно,

$$Q_x = \frac{\sum \delta A}{\delta x} = \frac{g}{2} (2m_1 - m_3). \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в уравнение (3.1), получаем:

$$\frac{\ddot{x}}{8} (8m_1 + 4m_2 + 3m_3) = \frac{g}{2} (2m_1 - m_3),$$

отсюда

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{4g(2m_1 - m_3)}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}. \quad (3.5)$$

4. Для определения закона движения груза I дважды интегрируем дифференциальное уравнение (3.5):

$$\dot{x}(t) = \frac{4g(2m_1 - m_3)}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3} t + C_1, \quad x(t) = \frac{4g(2m_1 - m_3)}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3} t^2 + C_1 t + C_2.$$

Из начальных условий $\dot{x}(0) = 0$ и $x(0) = 0$ следует, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$.

Таким образом, груз I движется с постоянным ускорением согласно закону

$$x(t) = \frac{4g(2m_1 - m_3)}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3} t^2.$$

Ответ: $a_1 = \frac{4g(2m_1 - m_3)}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}, \quad x(t) = \frac{4g(2m_1 - m_3)}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3} t^2.$

3.5. Требования к содержанию отчета о выполнении задания 3

Отчет о выполнении задания 3 должен содержать:

- 1) тему и вариант задания;
- 2) исходную схему и полное условие задания;
- 3) подробное, последовательное и аккуратно оформленное решение задачи, выполненное в соответствии с порядком выполнения задания (см. п. 3.2) и примером выполнения задания (см. п. 3.4);
- 4) ответ.

3.6. Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение Лагранжа 2-го рода для системы с одной степенью свободы.
2. Чему равно число составляемых уравнений Лагранжа 2-го рода для многостепенной механической системы?
3. С помощью уравнений Лагранжа 2-го рода выведите дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

Список использованной литературы

1. Волков А.Э., Чеканина Е.А. Основы теоретической механики: учеб. пособие / А.Э. Волков, Е.А. Чеканина. – Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2022. – 192 с.: ил.
2. Динамика: учебное пособие / С.А. Еленев, В.Г. Новиков, А.И. Огурцов, Г.И. Шевелева. – М.: ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2010.
3. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Кинематика: учебное пособие. М.: ИЦ МГТУ «Станкин», 2002. — 129 с.
4. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Статика. Учебное пособие. Издание второе, переработанное. – М.: ИЦ ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2006. — 124 с.
5. Лабораторный практикум по теоретической механике: учеб. пособие / А.Э. Волков, Е.А. Чеканина, Ю.А. Поляков [и др.]; под общ. ред. А.Э. Волкова. – Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2023. – 80 с.: ил.